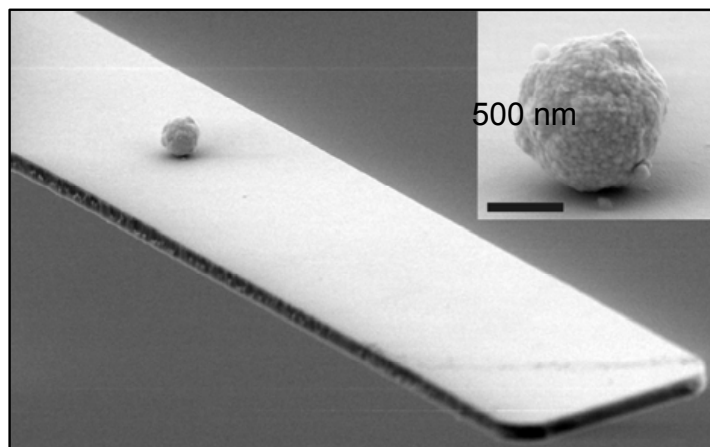
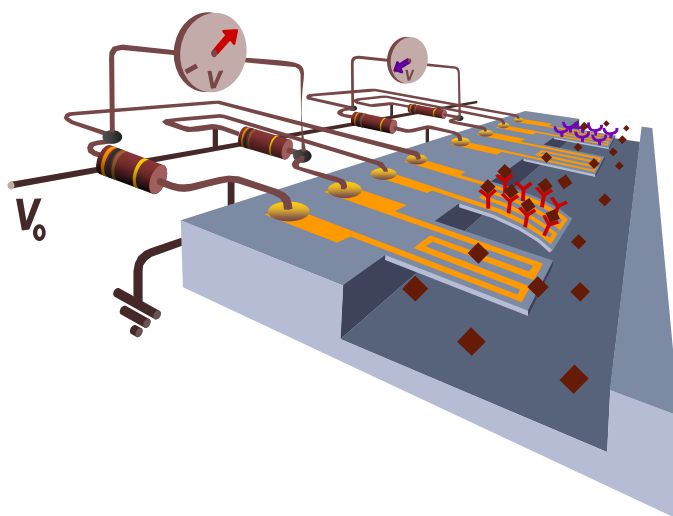


Partikelvægt

- fra svingende linealer til lægens chip-laboratorium



Indhold

1	Introduktion	1
2	Forsøget	2
2.1	Opstilling	2
2.2	Teori	2
2.3	Udførelse	3
2.4	Konklusion	3
3	Teori for svingende bjælke - gymnasieniveau	3
3.1	Svingningstid for masseløs bjælke	4
3.2	Svingningstid for bjælke uden partikel	4
3.3	Svingningstid for bjælke med flere partikler	4
4	Til ingeniørstuderende	5
4.1	Måletekniske problemstillinger	5
4.2	Teori for svingende bjælke	5
4.3	Masseløs bjælke med partikel	5
4.4	Massiv bjælke uden partikel	8
4.5	Konklusion	10

1 Introduktion

Øvelsen forudsætter kendskab til svingningstiden for harmoniske svingninger (Fysik A-niveau). Øvelsen kan også udføres af ingeniørstuderende, der kender til differentialligninger og lineær algebra.

Øvelsen handler om vejning ved hjælp af svingninger. Du kender måske fænomenet fra legepladsen, hvor man kan sætte sig på et fjedrende dyr. Jo tungere man er, desto langsommere svinger det. Astronautrer bruger denne metode, når de skal veje sig i vægtløs tilstand i rummet; her fungerer en normal badevægt nemlig ikke.

På mikroplan kan princippet bruges til vejning af meget små stofmængder, det værende små partikler eller biologisk interessante molekyler. Dette fungerer ved, at stoffet sætter sig på en lille bjælke (bladfjeder, eng. cantilever), som er i svingning. Når bjælkens fjederkonstant kendes, kan massen af stoffet beregnes ud fra svingningstiden.

Svingningstiden måles ved hjælp af strain-gauges (trækfølsomme modstande, da. tøjningsmålere), der er klistret fast på bjælken. På forsidebilledet er princippet illustreret med en hel række af bjælker i et chip-laboratorium (lab-on-a-chip-system). På denne måde kan de f.eks. bruges til at lave en blodprøvetest hos lægen, så man slipper for at sende prøven til hospitalet, hvorved ventetiden på resultatet mindskes.

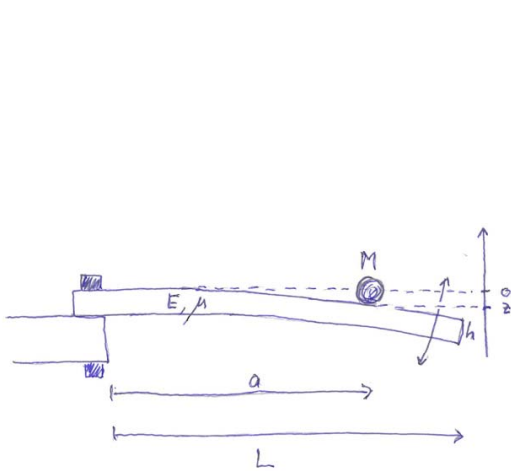
På hver bjælke sidder forskellige antistoffer, der binder de specifikke molekyler af interesse. Når molekylerne binder sig til en bjælke, vokser svingningstiden, og det er derudfra muligt at veje stofmængden og bestemme koncentrationen af stoffet i blodet. Ideen er, at chip-laboratorierne skal masseproduceres, så de kan bruges som engangsudstyr. På denne måde sikres det, de altid er sterile, selv ved brug i et U-land.

Det andet forsidebillede er et elektronmikroskopibillede af en rigtig bladfjeder med en mikro-partikel placeret ovenpå.

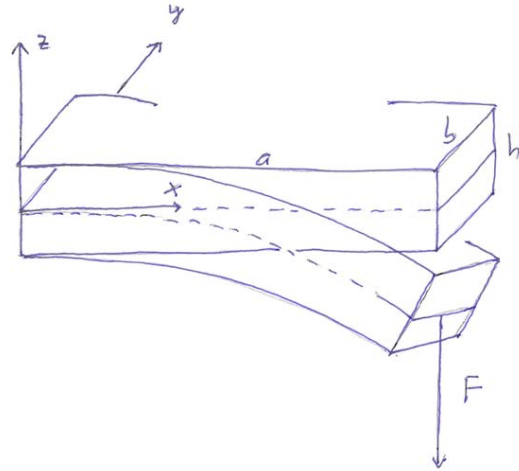
2 Forsøget

2.1 Opstilling

I Nanoteket skal der måles på en makroskopisk model af en bladfjeder: En lineal fastspændt til et bord. På linealen kan et jernlod fastgøres i forskellige positioner vha. magneter. Jernloddet forestiller så den partikel eller det molekyle, man vil veje. Tøjningsmålere er pålimet oversiden og undersiden af linealen og koblet elektrisk i en såkaldt Wheatstone-bro med to andre modstande. Systemet sættes i svingning, og svingningstiden måles ud fra den varierende spændingsfald over over- og undersidens tøjningsmålere. Ved hjælp af svingningstiden kan massen eller positionen af jernloddet dermed bestemmes.



Figur 1: Nedbøjet bjælke med benyttede symboler. Nedbøjningen z måles med M .



Figur 2: Nedbøjning af en bjælke fastspændt i den ene ende og belastet af kraften F i den anden.

2.2 Teori

Svingningstiden T for systemet opfylder med god tilnærmelse ligningen

$$T^2 = \frac{16\pi^2 M a^3}{E b h^3} + \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 E b h^3}, \quad (2.1)$$

hvor

M = partiklens masse,

a = partilens afstand fastspændingsstedet,

E = bjælkens elasticitetsmodul (dvs. den indre spænding er $E \cdot \Delta L/L$ ved en relativ forlængelse $\Delta L/L$. $E = 16$ GPa for ask, 14 GPa for bøg, begge langs årene),

b = bjælkens bredde,

h = bjælkens højde,

μ = bjælkens masse pr. længdeenhed,

L = bjælkens frie længde,

$\alpha = 1,875$, den mindste løsning til ligningen $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$.

Udledningen af udtrykket for T er givet i afsnit 3 eller afsnit 4 nedenfor. Blandt andet indgår, at nedbøjningen z af bjælken målt ved partiklens position a i ligevægtstilstanden (hvile) afhænger af a ved

$$z = \frac{4Mg}{E b h^3} a^3, \quad (2.2)$$

hvor $g = 9.82 \text{ N/kg}$ er tyngdeaccelerationen.

2.3 Udførelse

1. Nedbøjningens afhængighed af partikelpositionen undersøges eksperimentelt i en statisk opstilling og en foreløbig værdi for E bestemmes ud fra ligning (2.2). Lav enhedstjek efter isolering af E .
2. For den fastspændte lineal måles svingningstiden og en mere præcis værdi for E bestemmes ud fra ligning (2.1). Lav enhedstjek efter isolering af E .
3. Svingningstiden for en partikel med fast position a , men varierende masse M , undersøges. Plot T^2 som funktion af M , og bestem fitteparametrene. Hvilken linje skal der fittes efter?
4. Svingningstiden for en partikel med fast masse M , men varierende position a , undersøges. Plot T^2 som funktion af a^3 , og bestem fitteparametrene. Hvilken linje skal der fittes efter?
5. Placér en ukendt partikel på et kendt sted. Mål svingningstiden og beregn herudfra massen.
6. Placér nu en kendt partikel på et ukendt sted. Mål svingningstiden og bestem herudfra positionen.
7. Eventuelt: Teori og måling udvides til at omfatte flere partikler på én gang.

2.4 Konklusion

Er teorien fornuftig? Hvor nøjagtigt kan man måle massen og positionen?

3 Teori for svingende bjælke - gymnasieniveau

Forestil dig en målestok (trælineal), der er spændt vandret fast på et bord, så den stikker ud over kanten; det tekniske udtryk for dette er en homogen bjælke. En partikel lægges på linealen, dvs. bjælken påvirkes af en kraft F i afstanden a fra fastspændingsstedet. For små nedbøjninger^[1, 2] z gælder sammenhængen

$$z = \frac{F}{3EI} a^3, \quad (3.1)$$

hvor E er materialets elasticitetsmodul, og I er tværsnittets inertimoment (omkring en vandret akse midt i linealen). I er defineret som

$$I = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz, \quad (3.2)$$

hvor b er bjælkens bredde og h dens højde.

Opgave 1: a. Vis, at inertimomentet er givet ved

$$I = \frac{1}{12} b h^3 \quad (3.3)$$

b. Beregn den indre spænding i ask for en relativ forlængelse på 1%.

Opgave 2: Gør rede for, at sammenhængen mellem kraft og nedbøjning i (3.1) er som for en *elastisk kraft* med *fjederkonstant*

$$k = \frac{3EI}{a^3} \quad (3.4)$$

3.1 Svingningstid for masseløs bjælke

Vi vil nu bruge teorien for harmonisk svingning af en masseløs fjeder med et lod. Dvs. vi kun tager hensyn til partiklens masse og bjælkens stivhed, og altså ikke selve bjælkens masse. Svingningstiden for en masseløs fjeder med et lod er givet ved

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}, \quad (3.5)$$

hvor M er massen af loddet.

Opgave 3: Benyt ligning (3.3), (3.4) og (3.5) til at vise, at

$$T_1^2 = \frac{16\pi^2 M a^3}{Ebh^3} \quad (3.6)$$

3.2 Svingningstid for bjælke uden partikel

For også at få bjælkens masse med i svingningen, kigger vi nu på en bjælke med både masse og stivhed, men uden nogen partikel. For en homogen bjælke er *vinkelegenfrekvensen*, $\omega = 2\pi f$, givet ved^[6]

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{L^4 \mu}, \quad (3.7)$$

hvor $\alpha = 1,875$ er den mindste løsning til $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$, L er bjælkens længde, og μ er bjælkens masse pr. længdeenhed.

Fra teorien for harmoniske svingninger kendes sammenhængen mellem vinkelfrekvensen, ω , og svingningstiden for en bjælke med længden L , T_L ,

$$\omega T_L = 2\pi, \quad (3.8)$$

Opgave 4: Vis, at svingningstiden kan skrives som

$$T_L^2 = \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 Ebh^3} \quad (3.9)$$

Ved at indføre bjælkens massefylde ρ og tværsnitsareal A kan (3.9) omskrives til

$$T_L^2 = \frac{48\pi^2 \rho L^4}{\alpha^4 Eh^2} \quad (3.10)$$

Opgave 5: Vis, at (3.10) er korrekt.

Vink: Brug, at $\mu = m/L$, hvor m er bjælkens masse, der kan findes ud fra dens massefylde og rumfang. Bemærk desuden af (3.10), at breddeafhængigheden i (3.9) kun er tilsyneladende.

3.3 Svingningstid for bjælke med flere partikler

For nu at kæde de to svingningstider i (3.6) og (3.10) benyttes Dunkerleys princip (1895) for svingende systemer bestående af en aksel med flere skiver på. Akslen svarer til bjælken, og skiverne svarer til de partikler, der lægges på. Dunkerleys princip udtaler sig om den laveste egenfrekvens for det svingende system. Der haves^[4, 5, 6]

$$\frac{1}{\omega^2} \simeq \frac{1}{\omega_L^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}, \quad (3.11)$$

hvor ω_L er egenfrekvensen for systemet, hvis der kun tages hensyn til bjælkens masse og stivhed, og ω_i er egenfrekvensen for systemet, hvis der kun tages hensyn til den i 'te partikels masse og bjælkens stivhed.

Ligning (3.11) er dog kun en approksimation, men den er heldigvis ret god. For en bjælke understøttet i begge ender og med en partikel med massen M placeret på midten er fejlen størst for $M/m = 0,5$, hvor m er massen af bjælken. Fejlen på egenfrekvensen ω er da på kun 0,2%.

Som relation mellem svingningstiderne giver Dunkerleys princip da

$$T^2 = T_1^2 + T_L^2 = \frac{16\pi^2 M a^3}{Ebh^3} + \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 Ebh^3} \quad (3.12)$$

Opgave 6: a. Omskriv Dunkerleys princip i ligning (3.11) til en relation mellem kvadratet på svingningstiderne ved at benytte ligning (3.8).

b. Udled ligning (3.12) ved at benytte ligning (3.6) og (3.10).

Bemærk at seriekobling af fjedre er et eksempel på Dunkerleys princip. Her har man for to fjedre med fjederkonstanter k_1 og k_2 placeret i forlængelse af hinanden, at systemets samlede fjederkonstant er bestemt ved

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.13)$$

4 Til ingeniørstuderende

4.1 Måletekniske problemstillinger

Opgave 8: Usikkerhed. Undersøg ved hjælp af fejlphobningsloven, hvor nøjagtigt man kan bestemme hhv. masse og position af en partikel ud fra aktuelle usikkerheder på alle målte størrelser.

Opgave 8: Frekvensbestemmelse. Signalet fra tøjningsmålerne viser en dæmpet svingning, som analyseres med LabVIEWs funktion til "Extract single tone information". Spørgsmålet er, om den uddragne frekvens påvirkes af dæmpningsfaktoren. Med andre ord: Hvis man registrerer en amplitudeafhængig frekvens, er det så en reel måling, eller er det en kunstighed, som skyldes analysemetoden? Kunstigheden kunne tænkes at opstå, fordi man analyserer et bestemt tidsvindue af signalet. Efterhånden som svingningen klinger af, rykker dette tidsvindue mod højre svarende til lavere og lavere amplitude.

Problemet kan angribes praktisk ved at eksperimentere med forskellige tidsvinduer og teoretisk ved at se på Fouriertransformationer. Men især kan det angribes både eksperimentelt og teoretisk ved at sammenligne størrelsen af en evt. amplitudeafhængighed med en vurdering ud fra den opstillede teori i de følgende afsnit. Det kan gøres ved at sammenligne de effektive fjederkonstanter fra hhv. (3.1) og (??) og den deraf følgende indflydelse på svingningstiden i (3.6).

Opgave 9: Evt. Overtoner. Teori og måling udvides med overtoner til samtidig bestemmelse af både vægt og position.

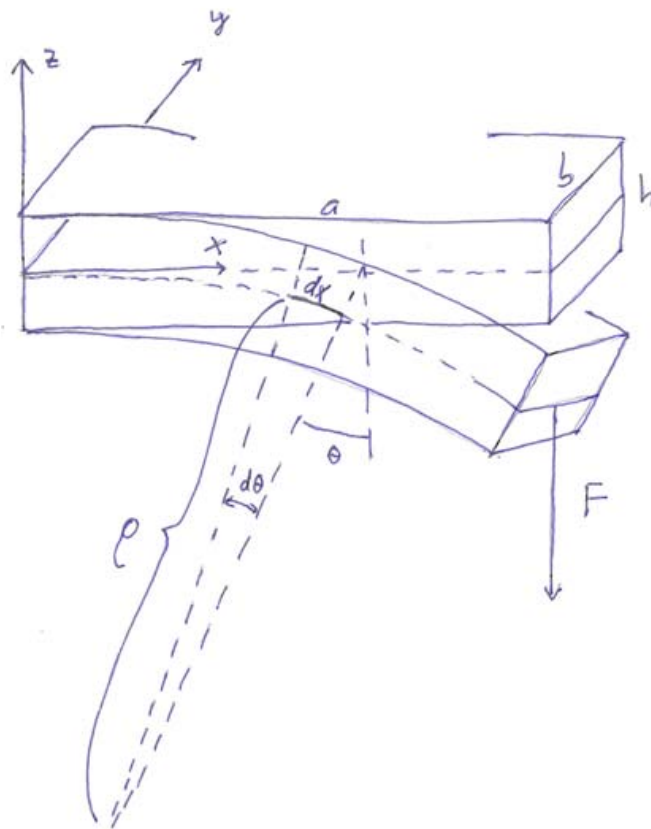
4.2 Teori for svingende bjælke

Teorien i afsnit 3 kombinerer to resultater for svingningstider for hhv. en massiv bjælke uden partikel og for en partikel på en masseløs bjælke; disse to vil vi nu udlede.

4.3 Masseløs bjælke med partikel

Vi antager, at belastningen kun foregår lodret, så der vil være en *neutral linje* midt i bjælken med samme længde a som den ubelastede bjælke. Vi antager desuden, at nedbøjningen er så lille, at vi kan se bort fra ændringer i formen på bjælkens tværsnit. Vi antager i øvrigt ikke noget om formen på den neutrale linje (den er ikke en del af en cirkelbue). Teorien, som gennemgås i dette

afsnit, er udviklet af J. Bernoulli og er fra ca. år 1700^[2]. Den er dog for nyligt videreudviklet af Edgardo Solano Carrillo^[1].



Figur 3: Lokal krumningsradius og de relevante størrelser for en nedbøjet bjælke.

Den lokale krumningsradius betegnes med ρ i positionen x , hvor den neutrale linje er nedbøjet til koordinaten z . Som resultat af nedbøjningen vil materialet over linjen blive strukket, og under vil det blive presset sammen. Tøjningen (den relative længdeændring, eng. strain) bliver med figur 3's betegnelser

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\rho + z)d\theta - \rho d\theta}{dx} = z \frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{\rho} \quad (4.1)$$

Ifølge definitionen af Youngs modul, E , vil den kraft df , der virker på et areal $dydz$ af tværsnittet, være givet ved

$$\frac{df}{dydz} = E \frac{\Delta dx}{dx}, \quad (4.2)$$

idet $df/dydz$ er spændingen (eng. stress) og $\Delta dx/dx$ er tøjningen. Indsættes (4.1) fås

$$df = \frac{zE}{\rho} dzdy \quad (4.3)$$

Størrelsen af det samlede kraftmoment τ på tværsnittet pga. de indre spændinger i positionen x findes nu ved

$$|\tau| = \int z df = \frac{E}{\rho} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dydz = \frac{EI}{\rho}, \quad (4.4)$$

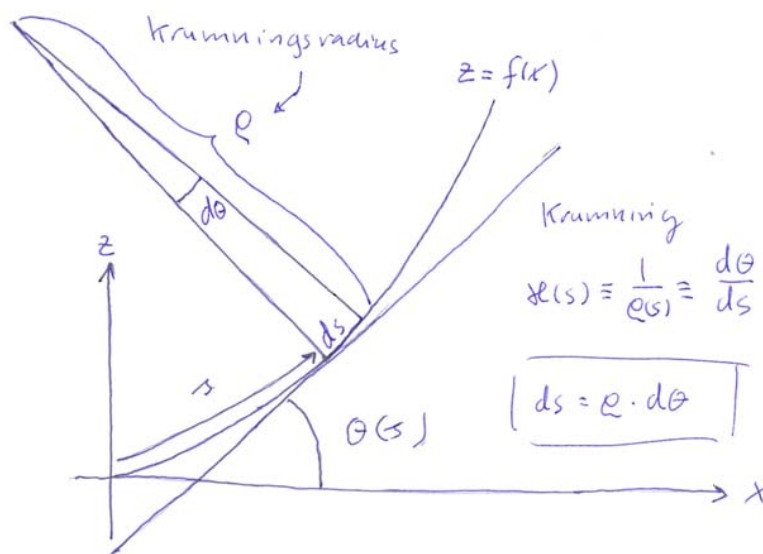
hvor tværsnittets intertymoment I er defineret ved

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dydz \quad (4.5)$$

I er et inertimoment omkring en vandret akse vinkelret på den neutrale linje, altså parallelt med y -aksen. Det er omkring denne akse, kraftmomentet τ vil søge at dreje tværsnittet tilbage mod uret.

Den spændte og nedbøjede bjælke vil være i ligevægt, når kraftmomenterne fra de indre spændinger opvejes af det modsatrettede kraftmoment fra en ydre belastning. Placeres en lille ydre belastning F for enden af bjælken med længde a , vil den i positionen x levere et kraftmoment $F(a-x)$ på det betragtede tværsnit. Med (4.4) giver det følgende ligevægtsbetingelse for kraftmomenterne:

$$\frac{EI}{\rho} = F(a-x) \quad (4.6)$$



Figur 4: Definition af krumning og krumningsradius.

Vi mangler nu et udtryk for krumningsradiussen, hvor krumningen er defineret i figur 4. Med figurens betegnelser får vi kurveelementet ds givet ved

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (4.7)$$

Pr. definition af krumningsradius har vi desuden

$$ds = \rho(s)d\theta(s), \quad (4.8)$$

hvor tangenvinklen er givet ved

$$\theta(s) = \arctan(f'(x)) \quad (4.9)$$

Med ds/dx fra (4.7) fås vha. kædereglen

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\theta(s)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta(s)}{dx} \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{d \arctan(f'(x))}{dx \sqrt{1 + (f'(x))^2}} \quad (4.10)$$

Resultatet er

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \quad (4.11)$$

For små nedbøjninger afviger den neutrale linje kun lidt fra vandret, så $f'(x) \sim 0$. For afbøjning nedad ($z < 0$) har vi dermed

$$\frac{1}{\rho(s)} \sim -f''(x) = -\frac{d^2z}{dx^2} \quad (4.12)$$

Indsættes (4.12) i kraftmomentbalancen i (4.6) fås følgende differentiaalligning til bestemmelse af kurven for den neutrale linje:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(a-x) \quad (4.13)$$

Ved at integrere to gange og udnytte randbetingelserne $z(0) = 0$ og $z'(0) = 0$ fås

$$z = -\frac{F}{EI} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (4.14)$$

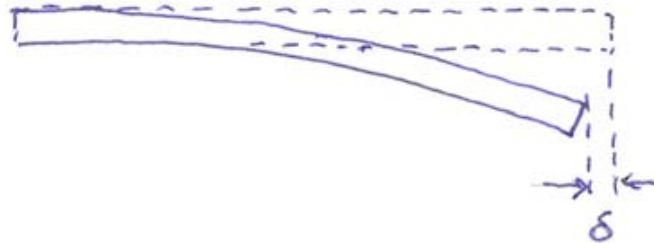
som for $x = a$ giver det i (3.1) anførte resultat for nedbøjningen

$$z = -\frac{Fa^3}{3EI} \quad (4.15)$$

Til sammenligning anføres her resultatet for nedbøjningen, når der tages højde for, at $f'(x) \neq 0$,

$$z = -\frac{F}{EI} \frac{(a-\delta)^3}{3} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{F}{EI} \right)^2 (a-\delta)^4 + \dots \right] \quad (4.16)$$

Korrektionen δ er forkortningen af bjælkens projektion på vandret, se figur 5. Dvs. (3.1) giver en god tilnærmelse, hvis man begrænser sig til belastninger F , der er små i forhold til *bøjningsstivheden* EI , og hvis man benytter længden af bjælkens vandrette projektion som a .



Figur 5: Forkortningen af bjælkens vandrette projektion hænger sammen med nedbøjningen.

Opgave 10: Giv et skøn over størrelsen af δ , hvis en 0.95 m lang bjælke nedbøjes 5 cm. Giv et skøn over den relative ændring i den effektive fjederkonstant og svingningstid ifølge (3.4) og (3.6).

4.4 Massiv bjælke uden partikel

Vi søger her at finde egenfrekvensen for en svingende, homogen bjælke. Egenfrekvensen er bestemt af bjælkens dimensioner i et samspil med dens masse pr. længdeenhed μ og dens bøjningsstivhed EI . Vi antager, at bjælken er homogen, og at udsvingene fra ligevægtstillingen er så små, at tværsnittets form forbliver konstant. Vi antager endvidere, at materialeudvidelserne i længderetningen over den neutrale linje og sammenpresningerne under er så små, at E forbliver konstant.

Vi beskriver bjælkens svingninger i lodret plan ved en funktion $u(x, t)$, se figur 6. Dermed bliver den lokale udbøjning $z = u(x, t)$. Funktionens øjebliksværdi er bjælkens øjeblikkelige facon langs den neutrale linje, der også kaldes den *neutral fiber*. Bevægelsen af et bjælkeelement opfylder

Fri i den anden ende

Her er bøjningsmomentet og dets afledede nul, altså

$$EIz'' = 0 \quad \text{og} \quad (EIz'')' = 0 \quad (4.23)$$

Opgave 11: Vis ved indsættelse af (4.21) i (4.20), at forholdet mellem vinkelegensfrekvensen ω og *formkoefficienten* γ er givet ved

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2 \mu}{EI} \quad (4.24)$$

Opgave 12: *Lineær algebra.* Opskriv ved at benytte randbetingelserne betingelsen for, at (4.20) har egentlige løsninger (altså løsninger, hvor ikke alle fire C_i er nul). Brug denne betingelse til at finde det i (3.7) anførte udtryk for den laveste egenfrekvens

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{L^4 \mu}, \quad (4.25)$$

hvor $\alpha = \gamma L = 1,875$ er den mindste løsning til $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$.

4.5 Konklusion

Hermed har vi redegjort for formlen (2.1) til beskrivelse af svingningstiden for en tynd bjælke belastet med en partikel. Teorien for partikelvægten bygger på bjælkens egensvingning styret af Newtons 2. lov ifølge (4.20) samt teorien for harmoniske svingninger af massebelastede fjedre ifølge (3.5), som dog også er et resultat af Newtons 2. lov.

Litteratur

- [1] Edgardo Solano Carrillo, *The cantilevered beam: an analytical solution for general deflections of linear-elastic materials*, Eur. J. Phys **27** (2006), 1437–1445.
- [2] Georg Joos, *Theoretical physics*, Dover, 1986, s176ff.
- [3] Kenneth G. McConnell, *Vibration testing: Theory and practice*, J. Wiley and Sons, New York, 1995, s140.
- [4] Jon J. Thomsen (Dept. of Mechanical Engineering, *Vibrations and stability*, Springer, Berlin, 2003, s59.
- [5] Francis S. Tee, Ivan E. Morse, and Rolland T. Hinkle, *Mechanical vibrations: Theory and applications*, 2nd ed., Allyn and Bacon, Boston, 1978, s264.
- [6] Viggo et al. Tvergaard, *Svingningslære*, Afdelingen for Faststofmekanik, Danmarks Tekniske Højskole (DTU), 1984, s88ff.