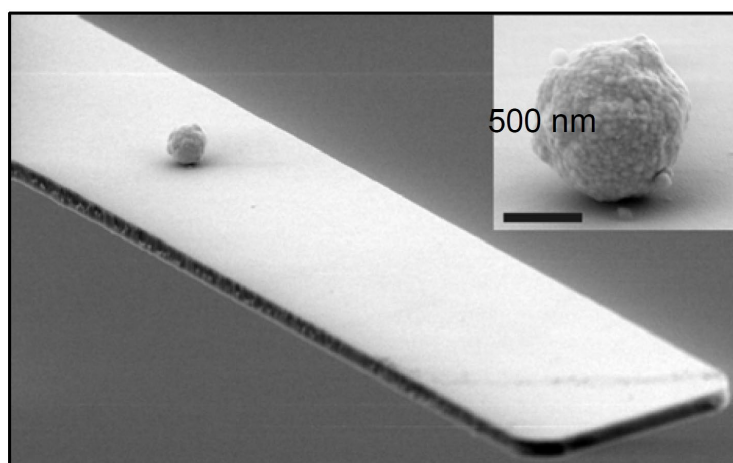
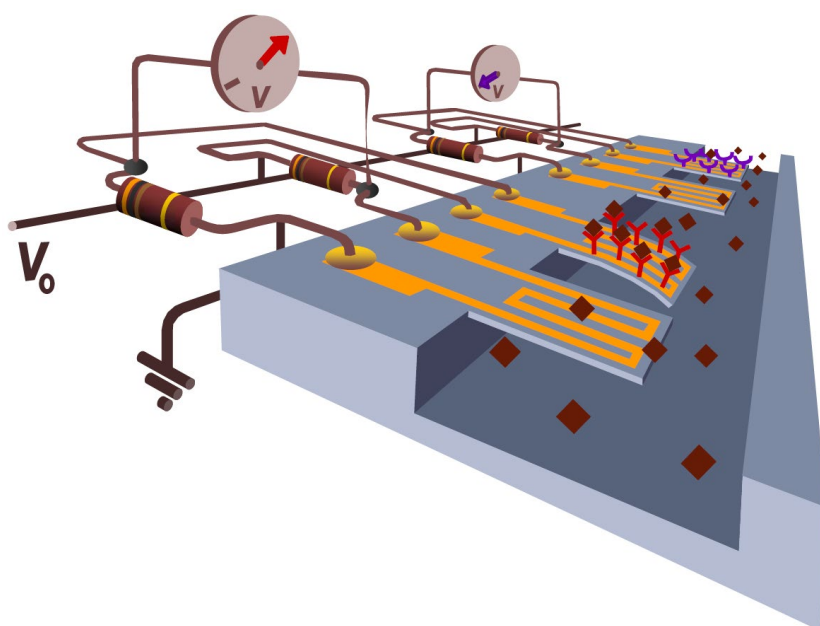


# Partikelvægt

- fra svingende linealer til lægens chip-laboratorium

Nanoteket, DTU Fysik



Copyright: Hel eller delvis gengivelse af denne vejledning er tilladt med kildeangivelse.

Forsidebillede øverst: Modeltegning af række af bjælker i et chip-laboratorium (lab-on-a-chip-system).  
Tegning af Anja Boisen.

Forsidebillede nederst: Elektronmikroskopibillede af en rigtig bladfjeder med en mikropartikel placeret.  
Billede fra Anja Boisen.

Rettelser til: [ole.trinhammer@fysik.dtu.dk](mailto:ole.trinhammer@fysik.dtu.dk)

12. januar 2021

## Indledning

Øvelsen forudsætter kendskab til svingningstiden for harmoniske svingninger (Fysik A-niveau). Øvelsen kan også udføres af ingeniørstuderende, der kender til differentiallyigninger og lineær algebra.

Øvelsen handler om vejning ved hjælp af svingninger. Du kender måske fænomenet fra legepladsen, hvor man kan sætte sig på et fjedrende dyr. Jo tungere man er, desto langsommere svinger det. Astronauter bruger denne metode, når de skal veje sig i vægtløs tilstand i rummet; her fungerer en normal badevægt nemlig ikke.

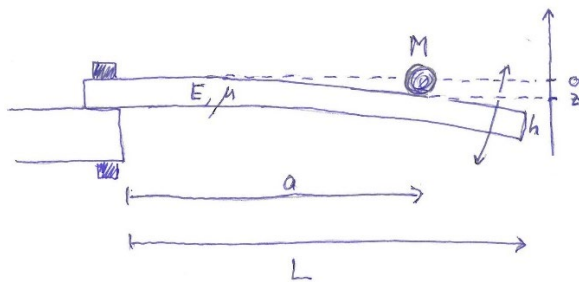
På mikroplan kan princippet bruges til vejning af meget små stofmængder, det kan være små partikler eller biologisk interessante molekyler. Dette fungerer ved, at stoffet sætter sig på en lille bjælke (bladfjeder, eng. cantilever), som er i svingning. Når bjælkens fjederkonstant kendes, kan massen af stoffet beregnes ud fra svingningstiden.

Svingningstiden måles ved hjælp af strain-gauges (trækfølsomme modstande, da. tøjningsmålere), der er limet fast på bjælken. På forsidebilledet er princippet illustreret med en hel række af bjælker i et chip-laboratorium (lab-on-a-chip-system). På denne måde kan de f.eks. bruges til at lave en blodprøvetest hos lægen, så man slipper for at sende prøven til hospitalet, hvorved ventetiden på resultatet mindskes.

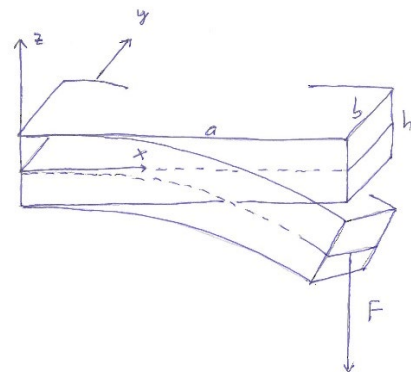
På hver bjælke sidder forskellige antistoffer, der binder de specifikke molekyler af interesse. Når molekylerne binder sig til en bjælke, vokser svingningstiden, og det er derudfra muligt at veje stofmængden og bestemme koncentrationen af stoffet i blodet. Ideen er, at chip-laboratorierne skal masseproduceres, så de kan bruges som engangsudstyr. På denne måde sikres det, at de altid er sterile, selv ved brug i et U-land. Det andet forsidebillede er et elektronmikroskopibillede af en rigtig bladfjeder med en mikropartikel placeret ovenpå.

## Opstilling

I Nanoteket skal der måles på en makroskopisk model af en bladfjeder: En lineal er fastspændt til et bord. På linealen kan et jernlod fastgøres i forskellige positioner vha. magneter. Jernlodet forestiller så den partikel eller det molekyle, man vil veje. Tøjningsmålere er pålimet oversiden og undersiden af linealen og koblet elektrisk i en såkaldt Wheatstone-bro med to andre modstande. Systemet sættes i svingning, og svingningstiden måles ud fra det varierende spændingsfald over over- og undersidens tøjningsmålere. Ved hjælp af svingningstiden kan massen eller positionen af jernlodet dermed bestemmes.



Figur 1. Nedbøjet bjælke med benyttede symboler. Nedbøjningen  $z$  måles ved  $M$ .



Figur 2. Nedbøjning af en bjælke fastspændt i den ene ende og belastet af kraften  $F$  i den anden ende.

## Teori

Svingningstiden  $T$  for systemet opfylder med god tilnærmelse

$$T^2 = \frac{16\pi^2 Ma^3}{Eb h^3} + \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 Eb h^3}, \quad \text{hvor} \quad (1)$$

$M$  = partklens masse

$a$  = partklens afstand fra fastspændingsstedet

$E$  = bjælkens *elasticitetsmodul* = 16 GPa for ask, 14 GPa for bøg, begge langs årene

$b$  = bjælkens bredde

$h$  = bjælkens højde

$\mu$  = bjælkens masse pr. længdeenhed

$L$  = bjælkens frie længde

$\alpha = 1,875$  er den mindste løsning til ligningen  $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$

Udledelsen af udtrykket for  $T$  er givet nedenfor. Blandt andet indgår, at nedbøjningen  $z$  af bjælken målt ved partklens position  $a$  i ligevægtstilstanden (hvile) afhænger af  $a$  i 3. potens.

$$z = \frac{4Mg}{Eb h^3} a^3, \quad g = 9,82 \text{ N/kg} \quad (2)$$

## Udførelse

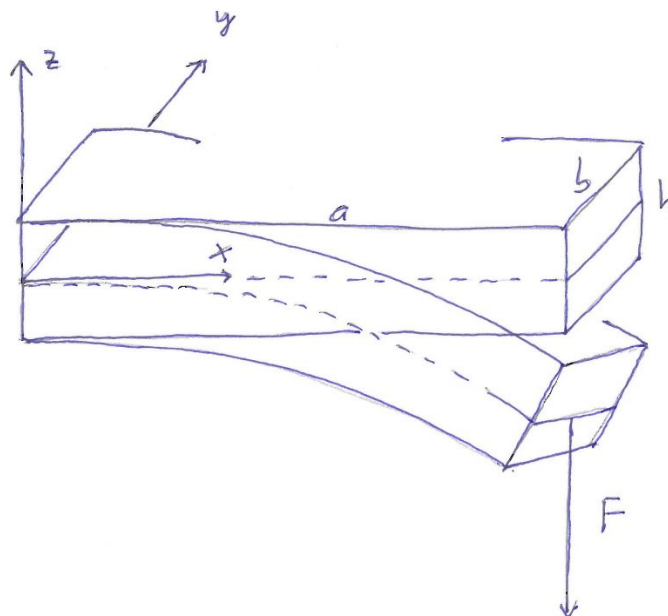
1. Nedbøjningens afhængighed af partikelpositionen undersøges eksperimentelt i en statisk opstilling og en foreløbig værdi for  $E$  bestemmes ud fra formel (2). Lav enhedstjek efter isolering af  $E$ .
2. For den fastspændte lineal måles svingningstiden og en mere præcis værdi for  $E$  bestemmes ud fra formel (1). Lav enhedstjek efter isolering af  $E$ .
3. Svingningstiden for en partikel med fast position  $a$ , men varierende masse  $M$ , undersøges. Plot  $T^2$  som funktion af  $M$ , og bestem fitteparametrene. Hvilken linje skal der fittes efter?
4. Svingningstiden for en partikel med fast masse  $M$ , men varierende position  $a$ , undersøges. Plot  $T^2$  som funktion af  $a^3$ , og bestem fitteparametrene. Hvilken linje skal der fittes efter?
5. Placér en ukendt partikel på et kendt sted. Mål svingningstiden og beregn herudfra massen.
6. Placér nu en kendt partikel på et ukendt sted. Mål svingningstiden og bestem herudfra positionen.
7. Eventuelt: Teori og måling udvides til at omfatte flere partikler på én gang.

## Konklusion

Er teorien fornuftig? Hvor nøjagtigt kan man måle massen og positionen?

# Baggrundsteori

## Teori for svingende bjælke - gymnasieniveau



Figur 3. Nedbøjning af en bjælke fastspændt i den ene ende og belastet i den anden.

Forestil dig en målestok (trælineal med mm-skala), der er spændt fast vandret på et bord, så den stikker ud over kanten. Det tekniske udtryk er en *homogen bjælke*. En partikel lægges på linealen, dvs. at bjælken påvirkes af en kraft  $F$  i afstanden  $a$  fra fastspændingsstedet. For små nedbøjninger<sup>1,3)</sup>,  $z$ , gælder sammenhængen

$$z = \frac{F}{E \cdot I} \frac{a^3}{3}, \quad (3)$$

hvor  $E$  er materialets *elasticitetsmodul* (dvs. den indre spænding  $F/A = E \cdot \Delta L/L$  ved en relativ forlængelse  $\Delta L/L$ ) og  $I$  for tværsnitsarealet  $A$  er tværsnittets *arealinertimoment* (omkring en vandret akse midt i målestokken. Må ikke forveksles med inertimoment). For en bjælke med bredde  $b$  og højde  $h$ , er  $I$  defineret som

$$I = b \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz. \quad (4)$$

**Opgave 1: a.** Vis at  $I = \frac{1}{12}bh^3$ . (5)

**b.** Beregn den indre spænding i ask for en relativ forlængelse på 1%.

**Opgave 2:** Gør rede for at sammenhængen mellem kraft og nedbøjning i (3) er som for en *elastisk kraft* med fjederkonstant  $k = EI \frac{3}{a^3}$ . (6)

### Svingningstiden for systemet, hvis der kun tages hensyn til klumpens masse og bjælkens stivhed.

Fra teorien for harmonisk svingning af en fjeder med lod kendes svingningstiden

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}, \quad (7)$$

hvor  $M$  er massen af det legeme, der svinger i fjederen.

**Opgave 3:** Benyt (7), (6) og (5) til at vise, at

$$T_1^2 = \frac{16\pi^2 Ma^3}{Ebh^3}. \quad (8)$$

### Svingningstiden for systemet, hvis der kun tages hensyn til bjælkens masse og stivhed

For en homogen bjælke, er *vinkel-egenfrekvensen*  $\omega = 2\pi f$  - hvor  $f$  er *frekvensen* – givet<sup>2)</sup> ved

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{L^4 \mu}, \quad (9)$$

hvor  $\alpha = 1,875\dots$  er den mindste løsning til ligningen  $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$ , mens  $L$  er bjælkens længde og  $\mu$  er dens masse pr. længdeenhed.

Fra teorien for harmonisk svingning kendes sammenhængen mellem *vinkelfrekvens* og svingningstid  $T_L$  for en bjælke med fri længde  $L$

$$\omega \cdot T_L = 2\pi. \quad (10)$$

**Opgave 4:** Vis at kvadratet på svingningstiden kan skrives som

$$T_L^2 = \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 Ebh^3}. \quad (11)$$

Ved at indføre bjælkens *massefylde*  $\rho$  og *tværsnitsareal*  $A$ , kan dette eventuelt omskrives til

$$T_L^2 = \frac{48\pi^2 \rho L^4}{\alpha^4 Eh^2}. \quad (12)$$

**Opgave 5:** Vis at (12) er korrekt. Vink: Brug  $\mu = m/L$ , hvor  $m$  er bjælkens masse, som kan findes ud fra dens massefylde og dens rumfang. Bemærk af (12), at breddeafhængigheden i (11) kun er tilsyneladende.

## Svingningstid for bjælke med en eller flere partikler

For nu at kæde de to svingningstider (8) og (11) sammen benytter vi Dunkerleys princip (1895) for svingende systemer bestående af en aksel med skiver på. Akslen svarer til bjælken og skiverne svarer til de partikler, man lægger på den. Dunkerleys princip udtaler sig om den laveste egenfrekvens for det svingende system. Man har<sup>2,5,6)</sup>

$$\frac{1}{\omega^2} \cong \frac{1}{\omega_L^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}, \quad (13)$$

hvor  $\omega_L$  = vinkel-egenfrekvensen for systemet, hvis der kun tages hensyn til bjælkens masse og stivhed og hvor  $\omega_i$  = vinkel-egenfrekvensen for systemet, hvis der kun tages hensyn til den  $i$ 'te partikels masse og bjælkens stivhed. Formel (13) er dog kun en tilnærmelse, men den er heldigvis temmelig god. For en bjælke understøttet i begge ender og med en klump med masse  $M$  på midten er fejlen størst for  $M/m = 0.5$ , hvor  $m = \mu L$  er massen af bjælken. Fejlen på egenfrekvensen  $\omega$  er da kun 0,2 %.

Som relation mellem svingningstider giver Dunkerleys princip nu

$$T^2 = T_1^2 + T_L^2 = \frac{16\pi^2 Ma^3}{Ebh^3} + \frac{48\pi^2 \mu L^4}{\alpha^4 Ebh^3} \quad (= \frac{16\pi^2 Ma^3}{Ebh^3} + \frac{48\pi^2 \rho L^4}{\alpha^4 Eh^2}). \quad (14)$$

**Opgave 6: a.** Omskriv Dunkerleys princip (13) til en relation mellem kvadratet på svingningstiderne ved at benytte (10).

**b.** Udled (14) ved at benytte (8) og (11).

Bemærk at seriekobling af fjedre er et eksempel på Dunkerleys princip. Her har man for to fjedre med fjederkonstanter  $k_1$  og  $k_2$ , at systemets fjederkonstant er bestemt ved

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (15)$$

## Referencer

- 1) Georg Joos, *Theoretical Physics*, s176ff, Dover 1986 (Blackie & Son 3rd ed. 1958, 1st ed 1934).
- 2) Viggo Tvergaard et.al. *Svingningslære*, s88ff, Afdelingen for Faststofmekanik, Danmarks tekniske Højskole (DTU) 1984
- 4) Kenneth G. McConnell, *Vibration Testing. Theory and Practice*, s140, J. Wiley and Sons, New York 1995
- 5) Francis S. Tee, Ivan E. Morse & Rolland T. Hinkle, *Mechanical Vibrations. Theory and Applications*, s264, 2<sup>nd</sup> ed, Allyn and Bacon, Boston 1978
- 6) Jon J. Thomsen (Dept. of Mechanical Engineering, DTU), *Vibrations and Stability*, s59, Springer, Berlin 2003



## Til ingeniørstuderende

### SVINGENDE BJÆLKE. Måletekniske problemstillinger for ingeniørstuderende

#### Opgave 7 a. Måletekniske problemstillinger

Undersøg ved hjælp af fejlafhængighedsloven, hvor nøjagtigt man kan bestemme hhv. masse og position af en partikel ud fra aktuelle usikkerheder på alle målte størrelser. Sammenlign med, hvor nøjagtigt man kan bestemme hhv. masse og position ud fra de fittede udtryk for måleserierne. Kommenter?

#### b. Kalibrering af systemet

Elasticitetsmodul kan bestemmes fra den målte ubelastede svingningstid  $T_0$  og dernæst indsættes i (1), så man får

$$T^2 = T_L^2 \left( \frac{Ma^3 \alpha^4}{3\mu L^4} + 1 \right) \quad (1A)$$

Udled dette udtryk og diskuter den måletekniske fordel ved det.

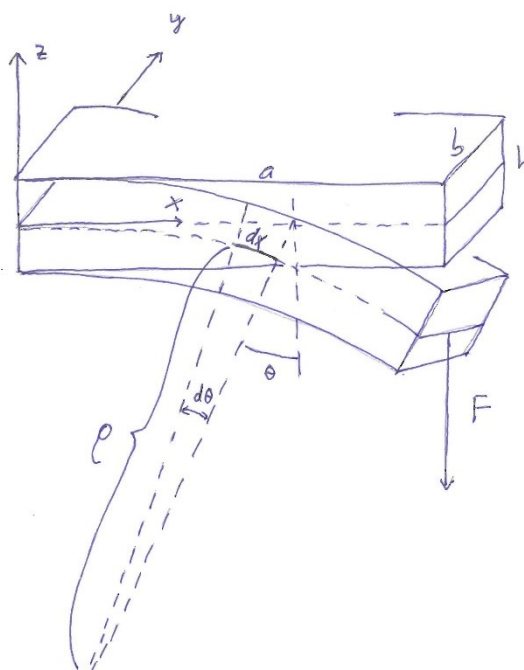
**Opgave 8. Frekvensbestemmelse.** Signalet fra tøjningsmålerne (strain gaugene) viser en dæmpet svingning, som analyseres med LabVIEWs funktion til "Extract single tone information". Spørgsmålet er, om den uddragne frekvens påvirkes af dæmpningsfaktoren. Med andre ord: Hvis man registrerer en amplitudeafhængig i frekvens, er det så en reel måling eller er det en kunstighed, som skyldes analysemetoden? Kunstigheden kunne tænkes at opstå, fordi man kun analyserer et bestemt tidsvindue af signalet. Efterhånden som svingningen klinger af, rykker dette tidsvindue mod højre svarende til lavere og lavere amplitude.

Problemet kan angribes praktisk ved at eksperimentere med forskellige tidsvinduer og teoretisk ved at se på Fouriertransformationer. Men især kan det angribes både eksperimentelt og teoretisk ved at sammenligne størrelsen af en eventuel amplitudeafhængighed med en vurdering ud fra den opstillede teori nedenfor. Det kan gøres ved at sammenligne de effektive fjederkonstanter fra hhv. (3) og (30) og den deraf følgende indflydelse på svingningstiden i (8).

**Opgave 9. Eventuelt. Overtoner.** Teori og måling udvides med overtoner til samtidig bestemmelse af vægt og position.

## SVINGENDE BJÆLKE. Teori for ingeniørstuderende

Teorien ovenfor kombinerer to resultater for svingningstider, som vi nu vil udlede. Næmlig for hhv. en massiv bjælke uden partikel og en partikel på en masseløs bjælke.



Figur 4. Lokal krumningsradius mm. for nedbøjet bjælke.

### Masseløs bjælke med partikel

Vi antager, at belastningen foregår lodret, så der vil være en *neutral linje* midt i bjælken med samme længde  $a$ , som den ubelastede bjælke. Vi antager desuden, at nedbøjningen er så lille, at vi kan se bort fra ændringer i formen på bjælkens tværsnit. Vi antager i øvrigt ikke noget om formen på den neutrale linje. (Den er ikke en del af en cirkelbue). Teorien, som gennemgås i dette afsnit<sup>1)</sup> er af J. Bernoulli og fra ca 1700, usikkerhed om det er Jakob (1654-1705) eller Johann (1667-1748). Teorien er videreudviklet<sup>3)</sup> i nyere tid af Edgardo Solano Carillo (2006).

Den lokale krumningsradius betegnes med  $\rho$  i positionen  $x$ , hvor den neutrale linje er nedbøjet til koordinaten  $z$ . Som resultat af nedbøjningen vil materialet over linjen blive strukket og under, vil det blive presset sammen. Den relative længdeændring, *tøjningen* (*strain'et*), bliver med figurens betegnelser

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\rho + z)d\theta - \rho d\theta}{dx} = z \frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{\rho}. \quad (16)$$

Ifølge definitionen af Youngs modul,  $E$ , vil den kraft  $df$ , der virker på et areal  $dzdy$  af tværsnittet være givet ved

$$\frac{df}{dzdy} = E \frac{\Delta dx}{dx}, \quad (17)$$

idet  $df / dzdy$  er spændingen (stress'et) og  $\Delta dx / dx$  er tøjningen (strain'et). Med (16) fås så

$$df = E \frac{z}{\rho} dzdy. \quad (18)$$

Størrelsen af det samlede kraftmoment  $M$  på tværsnittet på grund af de (indre) spændinger i positionen  $x$  findes nu ved integration

$$|M| = \int z df = \frac{E}{\rho} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz dy = \frac{E}{\rho} I, \quad (19)$$

hvor tværsnittets arealinertimoment  $I$  er defineret ved

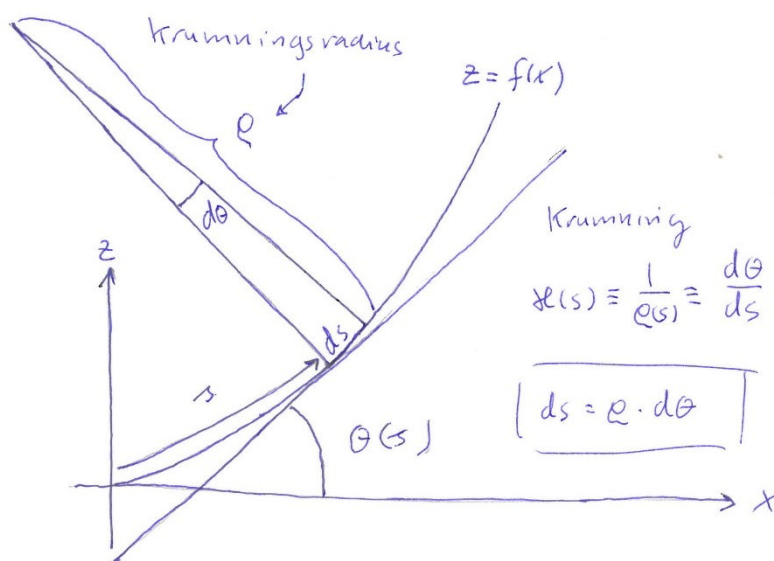
$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz dy \quad (20)$$

Det er et arealinertimoment omkring en vandret akse vinkelret på den neutrale linje (parallel med  $y$ -aksen). Nemlig den akse omkring hvilken, kraftmomentet  $M$  vil søge at dreje tværsnittet tilbage mod uret.

Den spændte og nedbøjede bjælke vil være i ligevægt, når kraftmomenterne fra de indre spændinger opvejes af det modsatrettede moment fra en ydre belastning. Placeres en lille ydre belastning  $F$  for enden af bjælken med længde  $a$ , vil den i positionen  $x$  levere et kraftmoment  $F(a - x)$  på det betragtede tværsnit. Med (19) giver det følgende ligevægtsbetingelse for kraftmomenterne

$$\frac{EI}{\rho} = F(a - x). \quad (21)$$

Vi mangler nu et udtryk for krumningsradiussen. Krumningen er defineret i figur 5.



Figur 5. Definition af krumning og krumningsradius.

Med figurens betegnelser får vi kurveelementet  $ds$  givet ved

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (22)$$

Pr definition af krumningsradius har vi også

$$ds = \rho(s) \cdot d\theta(s), \quad (23)$$

hvor tangentvinklen  $\theta$  er givet ved  $\theta(s) = \tan^{-1}(f'(x)). \quad (24)$

Med  $ds/dx$  fra (22) fås ved hjælp af kædereglen

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{d\theta(s)}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta(s)}{dx} \cdot \frac{1}{\left(\frac{ds}{dx}\right)} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}(f'(x))) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}. \quad (25)$$

Resultatet er

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}. \quad (26)$$

For små nedbøjninger afviger den neutrale linje kun lidt fra vandret, så vi kan sætte  $f'(x) \approx 0$ . For afbøjning nedad ( $z < 0$ ) har vi dermed

$$\frac{1}{\rho(s)} \approx -f''(x) = -\frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (27)$$

Indsætter vi dette udtryk for krumningen i momentbalancen (21), får vi følgende differentiaalligning til bestemmelse af kurven for den neutrale linje

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(a-x). \quad (28)$$

Vi integrerer to gange, benytter randbetingelserne  $z(0) = 0$  og  $z'(0) = 0$  og får

$$z = -\frac{F}{EI} \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (29)$$

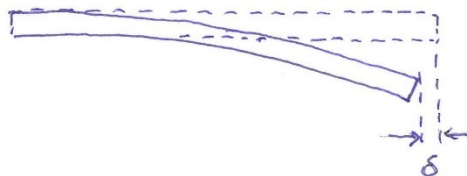
som for  $x = a$  giver det i (3) anførte resultat for nedbøjningen

$$z = -\frac{F}{EI} \cdot \frac{a^3}{3}. \quad (3)$$

Til sammenligning anføres her resultatet<sup>3)</sup>, når man tager højde for, at  $f'(x)$  ikke er 0.

$$z = -\frac{F}{EI} \cdot \frac{(a-\delta)^3}{3} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{F}{EI} \right)^2 (a-\delta)^4 + \dots \right] \quad (30)$$

Korrektionen  $\delta$  er forkortningen af bjælkens projektion på vandret, se figur 6. Dvs. (3) giver en god tilnærmelse, hvis man begrænser sig til belastninger  $F$ , der er små i forhold til *bøjningsstivheden*  $EI$ , og hvis man for  $a$  benytter længden af bjælkens vandrette projektion.

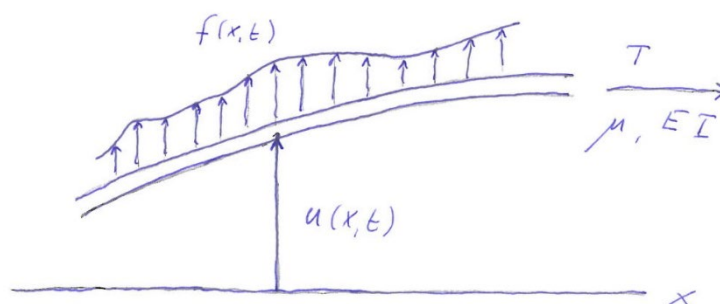


Figur 6. Forkortningen af bjælkens vandrette projektion hænger sammen med nedbøjningen.

**Opgave 10.** Giv et skøn over størrelsen af  $\delta$ , hvis en 95 cm lang bjælke nedbøjes 5 cm. Giv et skøn over den relative ændring i effektiv fjederkonstant og svingningstid ifølge (6) og (8).

## Massiv bjælke uden partikel

Vi skal her finde egenfrekvensen for en svingende homogen bjælke. Egenfrekvensen er bestemt af bjælkens dimensioner i et samspil med dens masse pr. længdeenhed  $\mu$  og dens bøjningsstivhed  $EI$ . Vi antager, at bjælken er homogen, og at udsvingene fra ligevægtsstillingen er så små, at tværsnittets form forbliver konstant. Vi antager endvidere, at materialeudvidelserne i længderetningen over den neutrale linje og sammenpresningerne under er så små, at elasticitetsmodulet forbliver konstant.



Figur 7. Definition af bjælkeelement med forskydning  $u(x,t)$ , masse pr. længdeenhed  $\mu$ , ydre belastning  $f(x,t)$ , aksial spænding  $T$ , bøjningsstivhed  $EI$  og stedkoordinat  $x$ .

Vi beskriver bjælkens svingninger i lodret plan ved en funktion af sted og tid, se figur 7. Dvs. den lokale udbøjning er beskrevet ved

$$z = u(x,t). \quad (31)$$

Funktionens øjebliksværdi er bjælkens øjeblikkelige facon langs den *neutrale linje*, også kaldet den *neutrale fiber*. Bevægelsen af et bjælkeelement opfylder Newtons 2. lov, som for en *tynd bjælke* i det almene tilfælde,<sup>4)</sup> får bidrag fra den ydre belastning langs bjælken, fra dæmpningen og fra de to elastiske kræfter, som skyldes henholdsvis den aksiale spænding og fra bøjningsstivheden

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{f(x,t)}_{\text{acc}} \underbrace{- D \frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{ydre last}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (T \frac{\partial u}{\partial x})}_{\text{spænding}} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}_{\text{bøjning}} \quad (31)$$

For en *ubelastet bjælke* er  $f = 0$ , og hvis bjælken er *fri i den ene ende*, kan vi også sætte den aksiale spænding  $T = 0$ . Endelig vil vi betragte tilfældet *uden dæmpning*, dvs.  $D = 0$ . Vi antager, at deformationen af bjælkens tværsnit er så lille, at vi kan regne bøjningsstivheden  $EI$  konstant. Dermed reducerer (31) til

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (32)$$

Vi søger harmoniske løsninger af formen<sup>2)</sup>

$$u(x, t) = z(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (33)$$

hvor  $z(x)$  kaldes *egenfunktioner*. Ideen i faktoriseringen (33) er, at vi beskriver bjælkens svingning, som en harmonisk svingning med bestemte "indhyldningsformer"  $z(x)$ . Egenfunktionerne er altså lokale amplituder, idet cosinusfaktoren varierer mellem -1 og +1. Med andre ord: Vi har her en generalisering af de stående svingninger, som vi kender fra den svingende streng. Egenfrekvenserne, som er bestemt af vinkelfrekvenserne  $\omega$ , kan da beskrives ved et samspil med de betingelser, der fastlægger egenfunktionerne. Indsættes (33) i (32) får man følgende differentiaalligning til fastlæggelse af egenfunktionerne

$$\mu \omega^2 z = EI z'''' \quad (34)$$

Den generelle løsning til (34) kan skrives på formen<sup>2, matematikreference mangler</sup>

$$z(x) = C_1 \sin(\gamma x) + C_2 \cos(\gamma x) + C_3 \sinh(\gamma x) + C_4 \cosh(\gamma x) \quad (35)$$

Da (34) er en 4. ordens differentiaalligning, har vi brug for 4 *randbetingelser* til at bestemme konstanterne  $C_i$ . Betingelserne er som følger<sup>2,5)</sup>

$$\text{Fastspændt ende: position fast og hastighed nul} \quad z = 0, \quad z' = 0. \quad (36)$$

$$\text{Frie ende: Bøjningsmoment og dets afledede nul} \quad EI z'' = 0, \quad (EI z'')' = 0. \quad (37)$$

**Opgave 11.** Vis ved indsættelse af (35) i (34), at samspillet mellem vinkelegenfrekvensen  $\omega$  og "formkoefficienten"  $\gamma$  er givet ved

$$\gamma^4 = \omega^2 \mu / (EI) \quad (38)$$

**Opgave 12.** Lineær algebra. Opskriv, ved at benytte randbetingelserne, betingelsen for, at (34) har egentlige løsninger, dvs. løsninger, hvor ikke alle fire  $C_i$ 'er i (35) er nul. Brug denne betingelse til at finde det i (9) anførte udtryk for den laveste vinkelegenfrekvens

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4 EI}{L^4 \mu}, \quad (9)$$

hvor  $\alpha \equiv \gamma L = 1,875\dots$  er den mindste løsning til ligningen  $\cos \alpha \cdot \cosh \alpha = -1$ .

## Konklusion

Hermed har vi redegjort for formlen (1) til beskrivelse af svingningstiden for en tynd bjælke belastet med en partikel. Teorien for partikelvægten bygger på bjælkens egensvingning styret af Newtons 2. lov ifølge (34) og teorien for harmoniske svingninger af massebelastede fjedre ifølge (7), som også er et resultat af Newtons 2. lov.